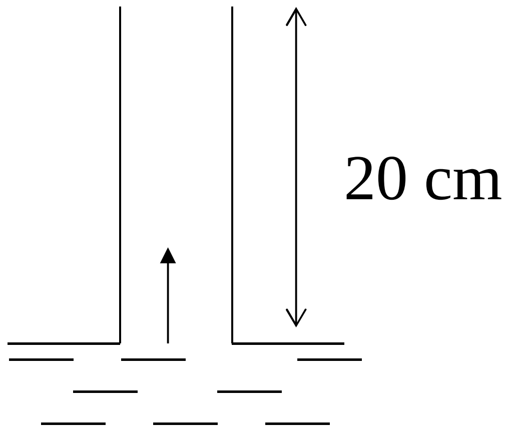
EJEMPLO DEL TUBO HUECO

Un tubo hueco de 20 cm de longitud está inicialmente lleno con aire conteniendo 2% de etilalcohol (vapor). Al fondo del tubo está una piscina de alcohol el cual se evapora en el gas estancado de arriba.

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$



D=0,119 cm^2/s

$$C(x,0) = 2\%$$

$$C(0,t) = 0\%$$

$$C(20,t) = 10\%$$

$$\Delta x = 4\text{cm} \qquad r = 1 \qquad \Delta t = 134{,}4\ \text{s}$$

$$-C_{i-1}^{j+1} + C_{i}^{j+1} - C_{i+1}^{j+1} = C_{i-1}^{j} + C_{i+1}^{j}$$

$$\begin{cases} -0 + C_1^2 - C_2^2 = 0 + 2 \\ -C_1^2 + 4C_2^2 - C_3^2 = 2 + 2 \\ -C_2^2 + 4C_3^2 - C_4^2 = 2 + 2 \\ -C_3^2 + 4C_4^2 - 10 = 2 + 10 \end{cases}$$

Matriz Tridiagonal que puede resolverse por el método de LU.

Los resultados son:

	METODO DE CRANK NICOLSON					
TIEMPO (s)	**C(X=0)**	**C(X=4)**	**C(X=8)**	**C(X=12)**	**C(X=16)**	**C(X=20)**
0,0	0,0	2,0	2,0	2,0	2,0	10,0
134,4	0,0	0,980	2,019	3,072	5,992	10,0
268,8	0,0	1,070	2,363	4,305	6,555	10,0
403,2	0,0	1,276	2,861	4,762	6,962	10,0
537,6	0,0	1,471	3,165	5,115	7,159	10,0

ESTABILIDAD Y CRITERIOS DE CONVERGENCIA

ESTABILIDAD: Los errores cometidos en un paso no causen errores mayores en los pasos siguientes.

CONVERGENCIA: Los resultados numéricos se aproximan a los analíticos cuando Δx y Δt tienden a cero.

Para garantizar la estabilidad y la convergencia de los métodos explícitos hay que garantizar la siguiente inecuación:

$$\frac{\Delta t}{\alpha (\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

ECUACIONES PARABOLICAS 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$\Delta x = \Delta y \quad \text{y} \quad r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Usando el método explícito:

$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} = r\left(u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right)$$

$$u_{i,j}^{k+1} = r\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right) + (1-4r)u_{i,j}^{k}$$

$$u_{i,j}^{k+1} = r\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right) + (1-4r)u_{i,j}^{k}$$

Si r = 1/4:

$$u_{i,j}^{k+1} = r\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right)$$

Este valor corresponde, al igual que el caso 1D visto anteriormente, al máximo valor de r permisible. Como r está relacionado con Δt de la siguiente manera:

$$r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Si el r es pequeño el Δt también lo será, por lo que para resolver la ecuación diferencial se requerirán de muchos cálculos.

Usando el método implícito:

$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} = \frac{r}{2}\left(\begin{array}{l} u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + \\ u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k} \end{array} \right)$$

Ahora hay que resolver MxN ecuaciones (M número de incógnitas en la dirección "x" y N número de incógnitas en la dirección "y") para cada paso en tiempo. La matriz ya no es tridiagonal, por lo que el proceso de cálculo se hace lento con mucho requerimiento de memoria.

Usando el método ADI:
"Alternating-Direction-Implicit scheme"
Peaceman y Rachford (1955)

$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} = r\left(\underbrace{u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k}}_{\text{Al comienzo}} + \underbrace{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}_{\text{Al final}}\right)$$

Luego,

$$u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k} = r\left(\underbrace{u_{i+1,j}^{k+2} - 2u_{i,j}^{k+2} + u_{i-1,j}^{k+2}}_{\text{Al final}} + \underbrace{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}_{\text{Al comienzo}}\right)$$

ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Ecuación de la onda: vibraciones

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Tg}{w}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

w peso/longitud
T tensión

Escrita en diferencias finitas:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{Tg}{w}\left[\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}\right]$$

Resolviendo:

$$y_i^{j+1} = \frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\left(y_{i+1}^{j} + y_{i-1}^{j}\right) - y_i^{j-1} + 2\left(1 - \frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\right) y_i^{j}$$

$$\text{Si} \quad \left(\frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2}\right) = 1$$

$$y_i^{j+1} = \left(y_{i+1}^{j} + y_{i-1}^{j}\right) - y_i^{j-1}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{Tg/w}}$$

El problema sería conocer $y(t_{-1})$, que es un punto ficticio. Este valor se genera conociendo el valor inicial de la velocidad:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(x), \quad t = 0$$

Escribiendo la expresión anterior en términos de una diferencia centrada:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{y_i^1 - y_i^{-1}}{2\Delta t} = g(x_i)$$

Despejando el valor de t_{-1}:

$$y_i^{-1} = y_i^1 - 2g(x_i)\Delta t$$

Sustituyendo en la ecuación general:

$$y_i^{j+1} = \left(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j\right) - y_i^{j-1}$$

Para j=0:

$$y_i^1 = \left(y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0\right) - y_i^{-1} = \left(y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0\right) - y_i^1 - 2g(x_i)\Delta t$$

$$2y_i^1 = \left(y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0\right) - 2g(x_i)\Delta t$$

$$y_i^1 = \frac{1}{2}\left(y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0\right) - g(x_i)\Delta t$$

De esta forma:

$$y_i^1 = \frac{1}{2}\left(y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0\right) - g(x_i)\Delta t$$

$$y_i^{j+1} = \left(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j\right) - y_i^{j-1}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{Tg/w}}$$

ECUACIONES HIPERBÓLICAS
EJEMPLO DE VIBRACIÓN DE UNA CUERDA

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Tg}{w}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

Datos:

T = 40.000 grf

g = 980 cm/s^2

w = 1/80 g/cm

L = 80 cm

Velocidad inicial en todos los puntos es cero.

y(10,0)=0,3; y(20,0)=0,6; y(30,0)=0,5; y(40,0)=0,4;

y(50,0)=0,3; y(60,0)=0,2; y(70,0)=0,1

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{Tg/w}}$$

$$\Delta x = 10\text{cm}$$

$$\Delta t = \frac{10}{\sqrt{40000\text{x}980/1/80}} = 0{,}000179\text{s}$$

Para este problema se tiene:

$$g(x_i) = 0$$

$$y_i^1 = \frac{1}{2}\left(y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0\right)$$

$$y_i^{j+1} = \left(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j\right) - y_i^{j-1}$$

	Ecuación de la onda: Vibración de una cuerda								
t	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
0	0	0,3	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,000179	0	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,000358	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,000537	0	-0,1	5,5511E-17	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0
0,000716	0	-0,1	-0,2	-0,1	1,1102E-16	0,1	0,2	0,1	0
0,000895	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,2	-0,1	8,3267E-17	0,1	0
0,001074	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
0,001253	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,4	-0,3	0
0,001432	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,3	0
0,001611	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,4	-0,3	0
0,00179	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
0,001969	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,2	-0,1	5,5511E-17	0,1	0
0,002148	0	-0,1	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,1	0
0,002327	0	-0,1	-5,5511E-17	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0
0,002506	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,002685	0	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,002864	0	0,3	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,003043	0	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,003222	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,003401	0	-0,1	-5,5511E-17	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0
0,00358	0	-0,1	-0,2	-0,1	-1,6653E-16	0,1	0,2	0,1	0
0,003759	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0

ECUACIONES HIPERBÓLICAS 2D
Una membrana que vibra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Tg}{w}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j}^{k-1}}{(\Delta t)^2} =$$

$$\alpha^2\left[\frac{u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} - 4u_{i,j}^{k}}{h^2}\right]$$

Despejando para t_{k+1}:

$$u_{i,j}^{k+1} = (\Delta t)^2 \alpha^2 \left[\frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k}{h^2} \right] + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}$$

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{h^2} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k \right] + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}$$

$$-4\left(\frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{h^2} \right) u_{i,j}^k$$

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{h^2} \left[u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k \right] - u_{i,j}^{k-1}$$

$$+\left\{ 2 - 4\left(\frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{h^2} \right) \right\} u_{i,j}^k$$

Cuando:

$$\frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

$$u_{i,j}^{k+1} = 2\left[u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right] - u_{i,j}^{k-1}$$

Para el primer paso:

$$u_{i,j}^{1} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j}^{0} + u_{i-1,j}^{0} + u_{i,j+1}^{0} + u_{i,j-1}^{0}\right] + (\Delta t)g(x,y)$$